Chute libre avec vitesse initiale non verticale .

On étudie le mouvement d'un objet lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ non horizontale, au voisinage du sol.
On considèrera par exemple le cas où $\vec{v_0}$ est dirigé vers le haut et la droite, incliné d'un angle α_0 sur l'horizontale (schéma)
On admet que l'étendue de la trajectoire est assez restreinte pour qu'on puisse considérer que $\vec{g}$ est uniforme.

Système étudié : objet lancé

Inventaire des forces extérieures subies par le système son poids $\vec{P}$. On néglige les forces exercées par l'air (frottements et poussée d'Archimède)

Référentiel d'étude : Terrestre, supposé galiléen pour pouvoir appliquer Newton

Origine des dates, $t=0$. Instant où on lâche l'objet

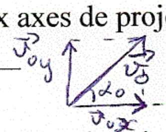
Repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Voir dessin

Appliquer la 2ème loi de Newton, en déduire le vecteur-accélération du centre d'inertie de l'objet. $\sum \vec{F} = m\vec{a}_G = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$

Déterminer les coordonnées a_x et a_y de celui-ci sur les axes de projection choisis.

$a_x =$ $0 \; (= \ddot{x} = \dot{v}_x)$ $a_y =$ $-g \; (= \ddot{y} = \dot{v}_y)$

Exprimer les coordonnées du vecteur-vitesse initiale $\vec{v_0}$ suivant les deux axes de projection choisis. $v_{0x} =$ $v_0 \cos \alpha_0$ $v_{0y} =$ $v_0 \sin \alpha_0$



Exprimer les coordonnées de la position initiale du centre d'inertie de l'objet dans le repère d'espace choisi. $x(t=0)=x_0=$ 0 $y(t=0)=y_0=$ 0

Déterminer les expressions en fonction du temps des coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse

$a_x = cste \Rightarrow v_x(t) = a_x . t + v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 \quad (= \dot{x})$

$a_y = cste \Rightarrow v_y(t) = a_y . t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \alpha_0 \; (= \dot{y})$

Déterminer les expressions en fonction du temps des coordonnées x et y du centre d'inertie de l'objet (équations horaires du mouvement).

$\dot{x} = v_0 \cos \alpha_0$ et $x = 0$ à $t = 0$ $\Rightarrow$ $x = v_0 (\cos \alpha_0) \times t$

$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha_0$ et $y = 0$ à $t = 0$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 (\sin \alpha_0)\, t$

Que peut-on dire du mouvement du projeté du centre d'inertie de l'objet sur l'axe horizontal ?

$v_x =$ constante : c'est un mouvement uniforme (et rectiligne évidemment)

En éliminant le temps entre les deux équations horaires, établir l'expression de l'équation de la trajectoire.

$x = v_0 \cdot (\cos\alpha_0)\, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}$

$y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 (\sin\alpha_0) t = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha_0} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{\cos\alpha_0}$

$y = -\frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha_0} + x \tan\alpha_0$

Quelle est la forme de la trajectoire ? C'est une parabole d'axe vertical, concavité vers le bas

Applications classiques :

Déterminer le "temps de vol" t_{max} (durée du mouvement avant que l'objet retombe au sol)

$y = 0$ pour $t = 0$ et $t = t_{max}$, or $y = -g/_2\, t^2 + v_0 (\sin\alpha_0) t$

$= t\left(-\frac{g}{2} t + v_0 \sin\alpha_0\right)$ donc t_{max} est tel que $-\frac{g}{2} t_{max} + v_0 \sin\alpha_0 = 0$

$t_{max} = \frac{2 v_0 \sin\alpha_0}{g}$

Déterminer la "portée" du lancé, x_{max} (distance horizontale parcourue par l'objet lorsqu'il repasse à son altitude de départ).

On peut calculer $x(t_{max})$ à partir du résultat précédent $x_{max} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}$

$= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$. On peut aussi utiliser l'équation de la trajectoire pour trouver la valeur non nulle de x qui annule y : $y = 0 = x\left(-\frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2\alpha_0} + \tan\alpha_0\right)$

Montrer que pour une valeur donnée de la vitesse initiale, la portée est maximale pour a_0=45°

$\frac{d x_{max}}{d\alpha_0} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha_0$: la dérivée de $x_{max}(\alpha_0)$ s'annule en changeant de signe de + à − pour $2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) donc comme $0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$ pour $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} = 45°$: c'est le maximum pour la valeur de x_{max}

Déterminer l'élévation maximale du centre d'inertie de l'objet ("flèche").

On peut chercher à quelle date v_y s'annule : $v_y = -g t + v_0 \sin\alpha_0 = 0$

$\Rightarrow t_F = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$ (c'est la moitié du temps de vol) puis en déduire y_{max} :

$y_{max} = y(t_F) = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}$

On peut aussi chercher x_F tel que $\frac{dy}{dx}$ soit nulle : on trouve $x_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} = \frac{x_{max}}{2}$ puis on calcule $y(x_F)$

Déterminer la valeur et la direction de la vitesse à un instant donné : par exemple à $t=t_{max}/4$.

$t = t_{max}/4 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{2g}$ $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha_0 \text{ (inchangée)} \\ v_y = -\frac{v_0 \sin\alpha_0}{2} + v_0 \sin\alpha_0 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{2} \end{cases}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \sqrt{\cos^2\alpha_0 + \frac{\sin^2\alpha_0}{4}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\alpha_0} = \frac{v_0}{2}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha_0}$

et, le vecteur vitesse faisant alors un angle α avec l'horizontale :

$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin\alpha_0}{2\cos\alpha_0} = \frac{\tan\alpha_0}{2}$